

حلّ المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة باستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنوس)

Solving homogeneous linear differential equations using series (Frobenius method)

م. م. زياد محمد عبد (*) Ass. Lec. Zeyad Mohammed Abed

م. م. وسام رافد داود (**) Ass. Lec. Wisam Rafid Dawood

تاريخ القبول: 2024-4-27

تاريخ الإرسال: 2024-4-15

الملخص

عند دراسة الرياضيات ينبغي الإشارة إلى المعادلات التفاضلية، ويكون فيها المتغير دالة، إذ إن هذه المعادلة تظهر العلاقة بين (الدالة) ومشتقاتها. وإنّ حلّ مثل هذه المعادلات التفاضلية يعني إيجاد



(الدوال، y -) التي تحقق تلك المعادلة، ومجموعة هذه الدوال تسمى (الحلّ العام للمعادلة)، وكل عنصر من هذه المجموعة، يسمى (حلاً خاصاً بالمعادلة).

أما المعادلة التفاضلية العادية، فتكون فيها (الدالة) بعنصر واحد. وذلك يكون عكس المعادلة التفاضلية الجزئية، التي يكون فيها المتغير دالة، وبعده متغيرات، والمشتقات مشتقات جزئية (والمعادلات التفاضلية)، مهمة جداً في تفسير الظواهر العلمية، الفيزيائية والكيميائية.

والسبب في ذلك يعود إلى أننا نستطيع كتابة (معادلات) بمتغيرات كثيرة (كدالة) للمشتقات مثل سرعة، وموقع الأجسام المختلفة. لذلك يلزم حلّ هذه (المعادلات) وكيفية التعامل معها، ويجب التنويه له في حالات كثيرة لا يمكن حلّ المعادلة بالطريقة الجبرية

* مدرس مساعد في جامعة النهرين - كلية العلوم - قسم علوم الحاسوب

AL-Nahrain University - College Of Scinces- Computer Science Department- Email: zeyad.mohammed@nah-rainuniv.edu.iq- Phone Number: +9647706282431

** مدرّس مساعد جامعة النهرين- كلية العلوم - قسم علوم الحاسوب

AL-Nahrain University / College Of Scinces- Computer Science Department- Email: wisam.rafid@nahrainuniv.edu.iq - Phone Number: +9647710587173

التامة، فلا بد من التعرف إلى نظريات وخواص هذه المعادلات، والتي بطبعتها تسهل الحل. ومن الممكن تصنيف المعادلات إلى فئات مختلفة بحسب رتبة المعادلة، إذ إن رتبة المعادلة هي أعلى (مشتقة)، تظهر بالمعادلة، أما درجة المعادلة فهي (الاس) المرفوع إليها على المشتقة. الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية - حل المعادلات التفاضلية - طريقة فروبنيوس

Abstract

When studying mathematics, differential equations should be indicated, in which the variable is (function) as this equation shows the relationship between (function) and its derivatives. Solving such differential equations means finding (functions) -y- that achieve that equation, and the set of these functions is called (general solution of equation). And every element of this group, called "equation solution". The normal differential equation is one element. This is the opposite (partial differential equation) in which the variable (function) and several variables, the derivatives are partial derivatives and (differential equations) are very important in the interpretation of scientific phenomena, physical and chemical. The reason for this is that we can write (equations) with many variables (as a function) of derivatives such as speed, location of different objects. Therefore, it is necessary to resolve these (equations) and how to deal with them. In many cases, the equation cannot be resolved in a totally compulsory manner. It is necessary to recognize (theories and characteristics of these equations) which by their nature facilitate the solution. Equations can be classified into different categories by (equation grade), as the equation rank is higher (derivative) and the equation grade is higher than the derivative.

Key Word: Differential equations- solving differential equations- Frobenius method.

المقدمة: المعادلات التفاضلية: المعادلة التفاضلية هي معادلة تربط (دالة واحدة)،⁽¹⁾ وفي التطبيق تمثل (الدوال) عموماً كميات مادية، وتمثل المشتقات (معدلات التغيير الخاصة)، وتعرف المعادلة التفاضلية العلاقة بين الأثنين⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾. نظراً لأن هذه (العلاقة) شائعة جداً. فإن (المعادلات التفاضلية) تلعب دوراً هاماً، في العديد من التخصصات مثل الهندسة والفيزياء والاقتصاد وعلم الأحياء، وتكون الدراسة للمعادلات التفاضلية من الممكن حلها بواسطة (صيغة واضحة)، ومع ذلك قد يتم تحديد العديد من خصائص (حلول معادلة تفاضلية) معينة دون حسابها بالضبط.

وجد طرق عديدة لحلّ المعادلات التفاضلية، منها:

❖ من الرتبة الأولى:-

(1) فصل المتغيرات: بفصل المتغيرات $(x \cdot dx)$ في جهة، ومن الجهة الاخرى $(y \cdot dy)$ على جانبي المعادلة، ومن ثم القيام بمكاملة الطرفين للحصول على شكل (دالة عادية)، $y = f(x)$

(2) (التعويض).

(3) (المعادلات الخطية).

(4) (برنولي).

❖ من الرتبة (n) :-

(1) اختزال (الرتبة).

(2) تحديد (المعاملات).

(3) مبادلة (المتغيرات).

(4) طريقة (كوشي - أويلر) لحلّ المعادلات التي فيها رتبة المشتقة هو نفسه (أس معاملها).

(5) طريقة المتابعات (الأسية).

ويوجد أكثر من أسلوب (الحلّ العددي)، كما توجد معادلات مشهورة مثل معادلة (لابلاس)، و(برنولي) وغيرهم.

وتحدد (درجة المعادلة التفاضلية) بحسب أس المشتق، ذو الرتبة الأعلى. عندما تكون (المعادلة التفاضلية) من الرتبة الثالثة. (أي ان أعلى تفاضل فيها هو التفاضل الثالث). فدرجة المعادلة تتحدد بحسب (أس) هذا (التفاضل). فمثلا إذا كان مرفوع الى (أس) -5- تكون المعادلة من الدرجة الخامسة.

أنواع المعادلات التفاضلية: يمكن تقسيمها إلى قسمين:

- 1- معادلات تفاضلية (عادية) - تحتوي على (توابع) ذات (متغير مستقل)، ومشتقات هذا المتغير.
- 2- معادلات تفاضلية (جزئية) - تحتوي (دوال رياضية) لأكثر من (متغير مستقل) في مشتقاتها الجزئية.

* كل من المعادلات التفاضلية (العادية) و(الجزئية) يمكن أن تصنف الى خطية وغير خطية.

* تكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:

الشرط الأول: إذا كانت معاملات (المتغير التابع)، والمشتقات فيها (دوال)، في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.

الشرط الثاني: إذا كان (المتغير التابع والمشتقات) غير مرفوعة الى (اس)، أي جميعها من الدرجة الأولى، وتكون (غير خطية) فيما عدا ذلك.

- * كل معادلة تفاضلية خطية تكون من الدرجة الأولى،
 - * ولكن ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى هي خطية، لأن الدرجة تتحدد حسب (أس التفاضل الأعلى)، ومن الممكن أن تكون التفاضلات الأقل (مرفوعة لأسس) غير الواحد، دون أن يؤثر ذلك على الدرجة وهذا بشرط حل المعادلة التفاضلية.
 - معادلة برنولي التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وليست معادلة خطية:
- $$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad n \neq 1$$

الفصل الأول: المعادلات التفاضلية الجزئية

تعريف 1: تعرف المعادلة التفاضلية (Differential Equation) بأنها إي معادلة ليست متطابقة مكونة من دوال جبرية أو دوال متساوية أو معا وتحتوي على مشتقة أو مشتقات دالة غير معلومة والشكل العام للمعادلة التفاضلية هو⁽⁵⁾

$$F(x, y)(x). y'(x). y''(x). y^3(x). \dots . y^n(x). \dots = C \quad (1)$$

مثال 1: في ما يلي بعض الأمثلة على المعادلة التفاضلية:

- i) $u'(t) = u(t)$
- ii) $u'(t) = u^2(t)$
- iii) $u'(t) = u(t) + \sin(x)$ (2)
- iv) $u''(s) + u(s) = s$
- v) $u^u(x) = \sin(x)$

تعريف 2: تعرف المعادلة التفاضلية الجزئية: أنها المعادلة التفاضلية التي تحتوي على دالة غير معلومة في متغيرين مستقلين أو أكثر ومشتقاتها الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية في المتغير المعقد u والمتغيرين المستقلين

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (3) \text{ هو } x, y \text{ هو } (1)$$

مثال 2: في ما يلي بعض الأمثلة على المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\text{iv) } u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$\text{vii) } u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$\text{viii) } u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

$$\text{ix) } u_{tt}(x, t) = (c[u(x, t)]u_x(x, t))_x$$

$$\text{x) } u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - u^2(x, t)$$

$$\text{xi) } u_t(x, t) + \left(\frac{1}{2}u^2(x, t)\right)_x = u_{xx}(x, t)$$

$$\text{xii) } u_t(x, t) + (x^2 + t^2)u_x(x, t) = 0$$

$$\text{xiii) } u_{tt}(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0$$

تعريف 3: تعرف رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية (Order of partial Differential Equations) بأنها رتبة أعلى مشتقة جزئية في تلك المعادلة التفاضلية الجزئية.

مثال 3: المعادلات التفاضلية الجزئية (xii) في (4) تكون من الرتبة الأولى.

المعادلات التفاضلية الجزئية (vi - xi) في (4) تكون من الرتبة الثانية.

المعادلات التفاضلية الجزئية (xiii) في (4) تكون من الرتبة الرابعة.

تعريف 4: تعرف درجة المعادلة التفاضلية الجزئية: أنها الدرجة الجبرية للمشتقة الجزئية ذات الرتب العليا والتي تظهر في تلك المعادلة التفاضلية الجزئية، وتكون درجة المعادلة التفاضلية الجزئية عدد صحيح موجب (3).

الفصل الثاني: حلّ المعادلات التفاضلية باستعمال المتسلسلات

هناك الكثير من المعادلات التفاضلية لا يمكن حلّها بالطرق المعتادة كالمعادلة التفاضلية $xy'' + y' + xy = 0$ وبعض منها يمكن حلّها باستعمال المتسلسلات ويمكننا الحلّ بطريقتين.

أولاً: باستعمال متسلسلة تايلر وذلك بفرض ان حلّ المعادلة التفاضلية هو $(2), (4)$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

ومنها نجد $y', y'', \dots$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

ثم نعوض عن $y, y', y'', \dots$ في المعادلة التفاضلية ونجد قيم الثوابت $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ بدلالة الثابتين a_0, a_1 أو احدهما ثم نعوض عن قيم الثوابت $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ بالفرضية. وهنا يجب ان تكون المتسلسلة متقاربة لقيم معينة لـ x .

مثال (1) حل المعادلة التفاضلية $y' - y = 0$
الحل / نفرض

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

وبتعويض y, y' في المعادلة التفاضلية $y' - y = 0$ نحصل على

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_3 - 4a_4)x^3 + (a_4 - 5a_5)x^4 + \dots = 0$$

وبمساواة معاملات x^n لكل n بالصفـر نحصل على:

$$(a_0 - a_1) = 0 \Rightarrow a_1 = a_0$$

$$a_1 - 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_2 - 3a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \times 3}$$

$$a_3 - 4a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4}$$

وبتعويض قيم $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \dots$ في الفرضية ينتج:

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_0}{2 \times 3} x^3 + \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4} x^4 + \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4 \times 5} x^5 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)$$

وبملاحظة أن:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

نحصل على: $y = a_0 e^x$

مثال (2) حل المعادلة التفاضلية ب $xy'' + y' + xy = 0$ باستعمال المتسلسلات.
الحل: نفرض:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

$$xy'' = 0 + 2a_2 x + 6a_3 x^2 + 12a_4 x^3 + 20a_5 x^4 + \dots \quad (1)$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots \quad (2)$$

$$xy = 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots \quad (3)$$

وبتعويض المعادلات الثلاث أعلاه في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$a_1 + (2a_2 + 2a_2 + a_0)x + (6a_3 + 3a_3 + a_1)x^2 + (12a_4 + 4a_4 + a_2)x^3 + \dots = 0$$

وبمساواة معاملات x المختلفة القوى بالصفر

$$a_1 = 0$$

$$2a_2 + 2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -(1/4)a_0$$

$$6a_3 + 3a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -(1/9)a_1 = 0$$

$$12a_4 + 4a_4 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -(1/16)a_2 \Rightarrow a_4 = (1/64)a_0$$

وعليه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = a_0 - (1/4)a_0x^2 + (1/64)a_0x^4 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 - (1/4)x^2 + (1/64)x^4 + \dots \right)$$

مثال (3) حل المعادلة التفاضلية $y'' - xy = 0$ باستعمال المتسلسلات (3)، (4).

الحل: نفرض: وبتعويض $y'' - xy = 0$ في المعادلة التفاضلية نحصل على:

وبمساواة معاملات x المختلفة القوى بالصفر

$$a_2 = 0$$

$$6a_3 - a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{6}$$

$$12a_4 - a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{12}$$

$$20a_5 - a_2 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{20} = 0$$

$$30a_6 - a_3 = 0 \Rightarrow a_6 = \frac{a_3}{30} = \frac{a_0}{180}$$

$$42a_7 - a_4 = 0 \Rightarrow a_7 = \frac{a_4}{42} = \frac{a_1}{504}$$

وبهذا يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = a_0 + a_1x + \frac{a_0}{6}x^3 + \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{180}x^6 + \frac{a_1}{504}x^7 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \dots \right)$$

ثانيًا: طريقة فروبنيوس: إنَّ المعادلات التفاضلية من الصعب حلها بالطرق الاعتيادية، ولا يمكن كتابة الحل بصورة متسلسلة تايلر، فعليه يجب أن يستخدم (طريقة فروبنيوس) (2)، (3)، (7) وهي:

$$y = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

ومتسلسلة فروبنيوس ذات فعالية بايجاد حل المعادلات التفاضلية التي بالصورة:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ ، $R(x)$ هي كثيرات حدود لـ x وسنبين طريقة فروبنيوس من

خلال الأمثلة التالية:

مثال (1) حلّ المعادلة التفاضلية، التالية: $4xy'' + 2y' + y = 0$
الحلّ: بفرض أن $a_0 \neq 0$ $y = a_0x^c + a_1x^{c+1} + a_2x^{c+2} + \dots$

$$y' = ca_0x^{c-1} + (c+1)a_1x^c + (c+2)a_2x^{c+1} + \dots$$

$$y'' = c(c-1)a_0x^{c-2} + c(c+1)a_1x^{c-1} + (c+1)(c+2)a_2x^c + \dots$$

$$4xy'' = 4c(c-1)a_0x^{c-1} + 4c(c+1)a_1x^c + 4(c+1)(c+2)a_2x^{c+1} + \dots$$

$$2y' = 2ca_0x^{c-1} + 2(c+1)a_1x^c + 2(c+2)a_2x^{c+1} + \dots$$

$$y = 0 + a_0x^c + a_1x^{c+1} + \dots$$

وبمساواة معاملات x المختلفة القوى بالصففر

$$c4(c-1)a_0 + c2a_0 = 0 \quad (1)$$

$$c4(c+1)a_1 + 2(c+1)a_1 + a_0 = 0 \quad (2)$$

$$4(c+1)(c+2)a_2 + 2(c+2)a_2 + a_1 = 0 \quad (3)$$

وباعتبار أن $a_0 \neq 0$ على نحصل (1) المعادلة فمن

$$c4(c-1) + c2 = 0 \Rightarrow 4c^2 - c4 + c2 = 0 \Rightarrow 4c^2 - c2 = 0$$

$$c2(c2-1) = 0 \Rightarrow c = 0 . c = 1/2$$

$$a_1 = \frac{-a_0}{c4(c+1) + 2(c+1)}$$

ومن المعادلة (2) نحصل على

$$a_2 = \frac{-a_1}{4(c+1)(c+2) + 2(c+2)}$$

ومن المعادلة (3) نحصل على

$$a_1 = \frac{-a_0}{2} \cdot a_2 = \frac{-a_1}{12} = \frac{a_0}{24} \quad \text{عندما } c = 0 \text{ فإن}$$

$$y_1 = a_0 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots \right) = A \cos \sqrt{x} \quad \text{وبذلك يكون}$$

$$a_1 = \frac{-a_0}{6} \cdot a_2 = \frac{-a_1}{20} = \frac{a_0}{120} \quad \text{عندما } c = \frac{1}{2} \text{ فإن :}$$

$$y_2 = a_0 \left(\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{x})^7}{7!} + \dots \right) = B \sin \sqrt{x} \quad \text{وبذلك يكون}$$

هو التفاضلية للمعادلة العام الحل فان وعليه $y = A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}$
 مثال (2): جد حل المعادلة التفاضلية $x^2 y'' + x6y' + y6 = 0$ باستعمال طريقة
 فروبنيوس
 الحل: نفرض أن:

$$y = a_0 x^c + a_1 x^{c+1} + a_2 x^{c+2} + \dots ; \quad a_0 \neq 0$$

$$y' = c a_0 x^{c-1} + (c+1) a_1 x^c + (c+2) a_2 x^{c+1} + \dots$$

$$y'' = c(c-1) a_0 x^{c-2} + c(c+1) a_1 x^{c-1} + (c+1)(c+2) a_2 x^c + \dots$$

$$x^2 y'' = c(c-1) a_0 x^c + c(c+1) a_1 x^{c+1} + (c+1)(c+2) a_2 x^{c+2} + \dots$$

$$x6y' = c6 a_0 x^c + 6(c+1) a_1 x^{c+1} + 6(c+2) a_2 x^{c+2} + \dots$$

$$y6 = 6 a_0 x^c + 6 a_1 x^{c+1} + 6 a_2 x^{c+2}$$

وبمساواة معاملات x^c بالصفر ينتج لنا:

$$c(c-1) a_0 + c6 a_0 + 6 a_0 = 0 ; \quad a_0 \neq 0$$

$$c^2 - c + c6 + 6 = 0 \Rightarrow c^2 + c5 + 6 = 0$$

$$(c + 3)(c + 2) = 0 \Rightarrow c = -3, -2$$

وبمساواة معاملات x^{c+1} بالصفرنحصل على $a_1 = 0$

وبمساواة معاملات x^{c+2} بالصفرنحصل على $a_2 = 0$

$$y = a_0 x^{-3} = Ax^{-3} \quad \text{عندما } c = -3 \text{ فإن}$$

$$y = a_0 x^{-2} = Bx^{-2} \quad \text{عندما } c = -2 \text{ فإن}$$

$$y = Ax^{-3} + Bx^{-2} \quad \text{هو التفاضلية للمعادلة العام الحل فإن وعليه}$$

الفصل الثالث

1. طريقة فروبنوس - Frobenius Method لحل المعادلة الخطية حول النقط العادية

يمكن إيجاد حلول متسلسلات القوى للمعادلات التفاضلية الخطية حول النقط

العادية. فإذا كانت x_0 نقطة عادية، فإن الحل المطلوب يجب أن يفرض على الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

توجد حلول متسلسلات القوى في حالات النقط الشاذة المنتظمة. نعتبر المعادلة

التفاضلية (6)، (7)؛

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1 \cdot 1)$$

نفرض أن $P(0) \neq 0$ الأمر الذي يعني أن النقطة $x_0 = 0$ نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية

(1.1). نبحث الآن عن حل المعادلة (1.1) في حالة $x > 0$ نضع المعادلة (1.1) في الشكل:

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0 \quad (1 \cdot 2)$$

أو في الشكل

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \quad (1 \cdot 3)$$

$$f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot g(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \quad (1 \cdot 4)$$

في (1.3) بضرب x^2 اذن

$$x^2 y'' + x[xf(x)]y' + x^2[g(x)]y = 0 \quad (1 \cdot 5)$$

طبعاً من الواضح هنا أنه إذا كانت الدالتان $xf(x) \cdot x^2 g(x)$ ثابتتين فإن المعادلة (1.5) تصبح على شكل معادلة أويلر المعروفة، هو حلها والتي $y(x) = x^r$

على أية حال، نفرض أن الدالتين $xf(x) \cdot x^2 g(x)$ ليستا ثابتتين ولكنهما تحليليتان عند النقطة $x_0 = 0$ بمعنى ان النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^{n+r} \quad (1 \cdot 6)$$

وبما أن $xf(x) \cdot x^2 g(x)$ دالتان تحليليتان، اذن فحسب تعريف الدوال التحليلية، يمكن تمثيلهما على شكل متسلسلات قوى في الشكل

$$xf(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \cdot x^2 g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j x^j \quad (1 \cdot 7)$$

أيضاً، بتفاضل (1.7) نحصل على

$$y'(x) = (n+r) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^{n+r-1} \quad (1 \cdot 8)$$

$$y''(x) = (n+r)(n+r-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^{n+r-2} \quad (1 \cdot 9)$$

بالتعويض من (1.6)، (1.7)، (1.8)، (1.9) في المعادلة (1.5) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + (A_0 + A_1 x + \dots) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + (B_0 + B_1 x + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

أو

$$\left[r(r-1)a_0 x^r + (1+r)ra_1 x^{1+r} + \dots \right]$$

$$+ (A_0 + A_1 x + \dots) \left\{ ra_0 x^r + (1+r)a_1 x^{1+r} + \dots \right\}$$

$$+ (B_0 + B_1 x + \dots) \left\{ a_0 x^r + a_1 x^{1+r} + a_2 x^{2+r} + \dots \right\} = 0$$

بعد الضرب والاختصار يتم مساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر
ولنبداً بمساواة معاملات قوى x^r بالصفر، والقسمة على $a_0 \neq 0$ باعتبار أن
فنحصل على ما يسمى «بمعادلة تعريف r »
وقد سميت هكذا لأنها تعرفنا بشكل r عند حلها، وهي تسمى بالإنجليزية (Indicial
Equation)، إذن معادلة التعريف هي

$$r(r-1) + A_0 r + B_0 = 0 \quad (1 \cdot 10)$$

وبحل معادلة التعريف هذه نحصل على الجذرين r_1, r_2 ، وبمساواة معاملات
 x^{n+r} بالصفر يمكن أن نحصل على الصورة الاختزالية لمعاملات a_n . النظرية التالية
توضح شكل الحل الذي بالطبع يتوقف على طبيعة الجذرين r_1, r_2 .

وحسب نظرية فروبنْيوس (Frobenius Theorem)

لنفرض أن r_1, r_2 هما جذران معادلة التعريف (1.10)، الخاصة بالمعادلة التفاضلية
(1.1)، إذن، طبقاً لشكل الجذرين r_1, r_2 فإن حل المعادلة (1.1) يمكن أن ينتمي إلى حالة
واحدة من الثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان الجذران r_1, r_2 مختلفين، والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً

أي إذا كان: $r_1 \neq r_2 \cdot (r_1 - r_2) \neq \text{integer}$
فإن حلّ المعادلة التفاضلية (1.1) هو $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
حيث:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \cdot y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} ; x > 0 \quad (1 \cdot 11)$$

الحالة الثانية: إذا كان الجذران r_1, r_2 مختلفين، والفرق بينهما عددًا صحيحًا أي إذا كان:
 $r_1 \neq r_2 \cdot (r_1 - r_2) = \text{positive integer}$

فإن حلّ المعادلة التفاضلية (1.1) هو $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
حيث:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} ; \quad (1 \cdot 12)$$

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_2} ; x > 0 ; A-\text{Constant} ; \quad (1 \cdot 13)$$

الحالة الثالثة: إذا كان الجذران r_1, r_2 مكررين، بمعنى أن يكون $r_1 = r_2 = \alpha$
إذن فإن حلّ المعادلة التفاضلية (1.1) هو

فإن حلّ المعادلة التفاضلية (1.1) هو $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} ; \quad (1 \cdot 14) \quad \text{حيث}$$

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+\alpha} ; x > 0 ; \quad (1 \cdot 15)$$

(مثال 1) باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد الحلّ العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2 y'' + (x + 4x^2) y' + (x^2 - 1)y = 0; x > 0$$

في هذه المعادلة لدينا

$$P(x) = 2x^2, Q(x) = (x + 4x^2), R(x) = (x^2 - 1)$$

وبما أن

$$P(x) = x^2 \rightarrow P(0) = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

إن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية المعطاة. نبحث الآن في ما إذا كانت $x_0 = 0$ نقطة شاذة منتظمة أم غير منتظمة. بما أن

$$\varphi_1(x) = (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = (x - 0) \frac{x + 4x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + x^2$$

$$\varphi_2(x) = (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = (x - 0)^2 \frac{x^2 - 1}{2x^2} = x - \frac{1}{2}$$

إن الدالتان $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ تحليليتان عند $x = 0$ ، وعلى هذا فالنقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة. يمكن أيضاً معرفة إذا كانت النقطة $x = 0$ شاذة منتظمة أم لا ولكن بأسلوب آخر. بما أنه يمكن وضع المعادلة التفاضلية المعطاة في الشكل:

$$x^2 y'' + x \left(\frac{1}{2} + x^2 \right) y' + \left(x - \frac{1}{2} \right) y = 0; x > 0$$

$$x^2 y'' + x \left(\frac{1}{2} + x^2 \right) y' + \left(x - \frac{1}{2} \right) y = 0; x > 0 \quad \text{إن نجد أن الدالتين}$$

$$xf(x) = \frac{1}{2} + x^2, x^2 g(x) = x - \frac{1}{2}$$

تحليليتان عند النقطة $x = 0$ ، إن $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المعطاة، ويمكن فرض حل فروبنوس

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \text{ بالتفاضل نحصل على:}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

وبالتعويض عن « y, y', y'' » في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+r) a_n x^{n+r} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

لجعل كل حدود المعادلة السابقة حدوداً في قوى x^{n+r} ، نضع في كل من المتسلسلة الثالثة والرابعة من جهة اليسار $n-1$ بدلاً من n ، فنحصل على

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+r) a_n x^{n+r} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r-1) a_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} \end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) a_n x^{n+r} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[r(r-1)a_0 + \frac{1}{2}ra_0 - \frac{1}{2}a_0 \right] x^r + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)a_n + \frac{1}{2}(n+r)a_n \right. \\ & \left. + 2(n-1+r)a_{n-1} + a_{n-1} - \frac{1}{2}a_n \right] x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

بمساواة معاملات x^r بالصفر مع فرض أن $a_0 \neq 0$ ، فنحصل على معادلة التعريف:

$$r(r-1) + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

حلّ هذه المعادلة يعطي $r_1 = 1$ ، $r_2 = -\frac{1}{2}$ بما أن $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ اذن شكل الحلّ ينطبق مع الحالة الأولى من نظرية فروبنويس ويأخذ الشكل (1.11)، وللحصول على الحلّ الأول $y_1(x)$ نقوم اولا بمساواة معاملات x^{n+r} بالصفر بغرض الحصول على الصورة الاختزالية العامة

$$\begin{aligned} & (n+r)(n+r-1)a_n + \frac{1}{2}(n+r)a_n \\ & + 2(n-1+r)a_{n-1} + a_{n-1} - \frac{1}{2}a_n = 0 \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

وبالتعويض في هذه الصورة الاختزالية عن $r = r_1 = 1$ ، نحلّ على الصورة الاختزالية لمعاملات a_n الخاصة بالحلّ الأول والتي تأخذ الشكل

$$a_n = \frac{-2(2n+1)}{n(2n+3)} a_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

بالتعويض عن $n=1,2,3,4$ بالترتيب في هذه الصورة الاختزالية يمكن أن نحصل على الشكل النوني للمعاملات a_n ، والتي تعتمد على المعامل a_0 وتأخذ الشكل

$$a_n = \frac{3(-1)^n 2^n}{n! (2n + 3)} a_0 \quad n = 1. 2. \dots$$

وهكذا نجد أن

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n 2^n}{n! (2n + 3)} a_0 x^{n+1} \end{aligned}$$

وبما أنه عندما $n = 0$

$$\frac{3(-1)^n 2^n}{n! (2n + 3)} = 1$$

إذن فإن الحل الأول هو

$$y_1(x) = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n! (2n + 3)} x^{n+1}$$

حيث a_0 أي ثابت اختياري غير صفري. للحصول على الحل الثاني $y_2(x)$ نعوض في الصورة الاختزالية العامة عن $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ فنحصل على الصورة الاختزالية لمعاملات b_n الخاصة بالحل الثاني والتي تأخذ الشكل

$$b_n = \frac{-4(n-1)}{n(2n-3)} b_{n-1} \quad n = 1. 2. \dots$$

بالتعويض الآن عن $n=1,2,3,4$ بالترتيب في هذه الصورة الاختزالية يمكن أن نحصل على الشكل النوبي للمعاملات b_n . فإذا بدأنا بالتعويض عن $n=1$ فإننا نجد أن $b_1 = 0$.

وبالاستمرار في التعويض ببقيّة قيم n نجد أن $b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$ الأمر الذي يعني أن الحلّ التالي يمكن أن يأخذ الشكل

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = b_0 x^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} \\ &= b_0 x^{\frac{1}{2}} + 0 = \frac{b_0}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

حيث b_0 هو أي ثابت اختياري غير صفري. إذن الحلّ العام للمعادلة

$$y(x) = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n! (n2 + 3)} x^{n+1} + \frac{b_0}{\sqrt{x}}$$

(مثال 2): باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد الحلّ العام للمعادلة

$$x^2 y'' + x5y' + (x+4)y = 0$$

الحلّ: في هذه المعادلة لدينا $P(x) = x^2$ ، $Q(x) = x5$ ، $R(x) = x+4$

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

وبما أن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة المعطاة. وبما أن الدالتين $\varphi_1(x)$ ، $\varphi_2(x)$ هما دالتان تحليليتان عند النقطة $x = 0$

حيث

$$\varphi_1(x) = x f(x) = (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = x \frac{x5}{x^2} = 5$$

وأيضاً فإن:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= x^2 g(x) = (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \\ &= x^2 \frac{x+4}{x^2} = x+4 \end{aligned}$$

إذن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة. إذن نفرض حلّ فروبنوس

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

على نحصل بالتفاضل

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

بالتعويض عن $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ في المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

نضع $1 \cdot n$ بدلاً من n في المتسلسلة الثالثة من جهة اليسار، وذلك حتى تكون في قوى $n+r$ وليس قوى $n+r+1$, إذن:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} \\ + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

أو

$$\left[(r(r-1) + r5 + 4)a_0 \right] x^r$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(n+r)(n+r+4) + 4]a_n + a_{n-1} \right\} x^{n+r} = 0$$

بمساواة معاملات x^r بالصفر، مع فرض أن $a_0 \neq 0$ نحصل على معادلة تعريف r في الشكل

$$r(r-1) + r5 + 4 = 0$$

حل هذه المعادلة يعطي $r_1 = r_2 = \alpha = -2$. وبا أن الجذرين متساويان، إذن وحسب الحالة الثالثة من نظرية فروبنيوس فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ حيث $y_2(x)$. $y_1(x)$ يأخذان الشكلين (1.15)، (1.14) على الترتيب بمساواة معاملات x^{n+r} بالصفر نحصل على الصورة الاختزالية

العامة

$$a_n = \frac{-1}{(n+r)(n+r+4) + 4} a_{n-1}$$

للحصول على المعاملات a_n الخاصة بالحل الأول $y_1(x)$ نعوض عن $r = -2$ فنحصل على الصورة الاختزالية

$$; n \geq 1 \quad a_n = \frac{-1}{((n-2)(n+2) + 4)} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{-1}{n} a_{n-1} ; n \geq 1 \text{ أو}$$

حيث نجد منها أن

$$a_1 = \frac{-a_0}{1^2} \cdot a_2 = \frac{-1}{2^2} a_1 = \frac{-1}{1^2} \cdot \frac{-1}{2^2} a_0 ;$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0 ; n \geq 1$$

وبالتالي فإن

$$y_1(x) = a_0 x^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0 x^{n-2}$$

$$= a_0 \left(x^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2} \right)$$

وبما أنه عند $n=0$ فإن $\frac{(-1)^n}{(n!)^2} = 1$ إذن فإن:

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2}$$

للحصول على المعاملات b_n ، وذلك حتى نتمكن من إيجاد الشكل النهائي للحل الثاني $y_2(x)$ نقوم بتفاضل الحل $y_2(x)$ فنحصل على

$$y_2'(x) = \frac{y_1}{x} + y_1'(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2) b_n x^{n-3}$$

وبتفاضل $y_2'(x)$ نحصل على

$$y_2''(x) = \frac{-y_1(x)}{x^2} + \frac{y_1'(x)}{x} + y_1''(x) \ln(x) + \frac{y_1'(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-4}$$

وبالتعويض عن الكميات $y_2''(x)$. $y_2'(x)$. $y_2(x)$ بدلا من الكميات $y(x)$. $y'(x)$. $y''(x)$ في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$\begin{aligned} & -y_1(x) + x2y_1'(x) + x^2 y_1''(x) \ln(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + 5y_1(x) + x5y_1'(x) \ln(x) \\ & + 5 \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-2} + (x+4)y_1(x) \ln(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$\begin{aligned} & 4y_1(x) + x2y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} \\ & + 5 \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} \\ & (x^2 y_1''(x) + x5y_1'(x) + (x+4)y_1(x)) \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

وبما أن الحد الأخير من المعادلة السابقة يتلاشى، وذلك لأن $y_1(x)$ هو أيضا حل المعادلة الأصلية المعطاة وبالتالي يحققها بمعنى أن

$$x^2 y_1''(x) + x5y_1'(x) + (x+4)y_1(x) = 0$$

إذن

$$4y_1 + x2y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

إذن، بالتعويض عن

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2}.$$

$$y_1'(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-3}$$

في المعادلة السابقة مع فرض أن $a_0 = 1$ (لاحظ أن a_0 تأخذ قيمة اختيارية)، نجد أن

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (n-2) x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1} x^{n-2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

نلاحظ هنا أنه قد تم وضع $1-n$ بدلاً من n في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$ فأصبحت $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-2}$ الآن بأعادة ترتيب المعادلة السابقة نحصل على:

$$4x^{-2} - 4x^{-1} + 2(-2)x^{-2} - 2(-1)x^{-1} + 2b_1x^{-1} - 5b_1x^{-1} \\ + 4b_1x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^n}{(n!)^2} + \frac{2(-1)^n}{(n!)^2} (n-2) \right. \\ \left. + (n-2)(n-3)b_n + 5(n-2)b_n + b_{n-1} + 4b_n \right] x^{n-2} = 0$$

وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر للحصول على المعاملات b_n نجد أن:

$$x^{-1}: -2 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 2$$

$$x^{n-2}: \frac{n2(-1)^n}{(n!)^2} + n^2 b_n + b_{n-1} = 0; \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

إن الصورة الاختزالية للمعاملات b_n هي

$$b_n = \frac{-b_{n-1}}{n^2} - \frac{n2(-1)^n}{n^2 (n!)^2}; \quad n \geq 2$$

ومنها نجد أن

$$b_2 = \frac{-b_1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}, \quad b_3 = \frac{-b_2}{9} - \frac{-6}{9 \cdot 6^2} = \frac{11}{108}, \dots$$

إن الحل الثاني $y_2(x)$

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{3}{4} + \frac{11}{108}x - \frac{25}{570}x^2 + \dots$$

(مثال 3) باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد الحل العام للمعادلة (6)، (8)

$$x^2 y'' + x^2 y' - y^2 = 0$$

الحلّ ، في هذه المعادلة لدينا

$$P(x) = x^2 \cdot Q(x) = x^2 \cdot R(x) = -2$$

وبما أن

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة. وبما أن الدالتين $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ هما تحليليتان عند $x = 0$ وذلك بسبب أن:

$$\varphi_1(x) = xf(x) = (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = x \frac{x^2}{x^2} = x$$

كما أن

$$\varphi_2(x) = x^2 g(x) = (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = x^2 \frac{-2}{x^2} = -2$$

إذن فإن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة. ولذا نفرض حلّ فروبنوس $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ المعطاة المعادلة في والتعويض ، الحلّ هذا ويتفاضل عن (x) $y(x), y'(x), y''(x)$ والاختصار نجد أن:

$$\begin{aligned} & [r(r-1)a_0 - 2a_0] + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)a_n \\ & + (n+r-1)a_{n-1} - 2a_n] x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

بفرض أن $a_0 \neq 0$ يمكن أن نحصل على معادلة تعريف r في الشكل

$$r(r-1) - 2 = 0$$

بحلّها نجد أن

$$r_1 = 2 \text{ , } r_2 = -1$$

وبما أن $r_1 - r_2 = 3$ أذن وحسب الحالة الثانية من نظرية فروبنيوس فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يأخذ الشكل

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث الحلان $y_1(x)$, $y_2(x)$ يعطيان من (1.12)، (1.13)، الآن وبعد مساواة معاملات x^{n+r} بالصفر نحصل على الصورة الاختزالية العامة في الشكل

$$a_n = \frac{-(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)-2} a_{n-1} ; n \geq 1$$

وللحصول على معاملات a_n عن $r = r_1 = 2$ فنحصل على الصورة الاختزالية

$$a_n = \frac{-(n+1)}{n(n+3)} a_{n-1} ; n = 1, 2, \dots$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = a_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n+1)}{n(n+3)} a_{n-1} x^{n+2} \\ &= a_0 x^2 \left(1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{20} x^2 - \dots + \dots \right) \end{aligned}$$

بما أن الحل الثاني يأخذ الشكل

$$y_2(x) = A y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} ; x > 0$$

إذن بوضع $r = -1$ نجد أن:

$$y_2(x) = Ay_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

هكذا نرى أنه للحصول على الشكل النهائي للحل الثاني $y_2(x)$ علينا بالحصول على معاملات b_n وبتفاضل الحل $y_2(x)$ نحصل على $y_2'(x)$. إذن، وبالتعويض بدلاً من y_2 . y_2' . y_2'' بالمعادلة التفاضلية نحصل على :

$$\begin{aligned} & Ax^2 y_1'' \ln(x) + Ax2y_1' - Ay_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2)b_n x^{n-1} \\ & + Ax^2 y_1' \ln(x) + Axy_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)b_{n-1} x^{n-1} \\ & - 2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - A2y_1 \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

وبإعادة ترتيب حدود هذه المعادلة نجد أنها تتحول إلى الشكل الجديد

$$\begin{aligned} & \ln A(x) \left(x^2 y_1'' + x^2 y_1' - 2y_1 \right) + Ax2y_1' - Ay_1 + Axy_1 \\ & - 2b_0 x^{-1} + 2b_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(n-1)(n-2) - 2]b_n \right. \\ & \left. + (n-2)b_{n-1} \right\} x^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

وبما أن الحد الأول من المعادلة السابقة يتلاشى وذلك لان $y_1(x)$ هو أيضاً حلّ للمعادلة الأصلية المعطاة وبالتالي يحققها بمعنى أن

$$\text{إذن } x^2 y_1'' + x^2 y_1' - 2y_1 = 0$$

$$Ax2y_1' - Ay_1 + Axy_1 - 2b_0x^{-1} + 2b_0x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{[(n-1)(n-2) - 2]b_n + (n-2)b_{n-1}\}x^{n-1} = 0$$

إذن، بالتعويض عن $y_1'(x)$ ، $y_1(x)$ في المعادلة السابقة، مع فرض أن $a_0 = 1$ لاحظ أن تأخذ قيمة اختيارية، ومساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر حتى نتمكن من الحصول على المعاملات b_n نجد أن:

$$\begin{cases} x^0: -b_0 - 2b_1 = 0 & \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}b_0 \\ x^1: -2b_2 = 0 & \Rightarrow b_2 = 0 \\ x^2: 4b_3 + b_2 = 0 & \Rightarrow b_3 = 0 \end{cases}$$

بمساواة المعاملات بدأ من معاملات قوى x^3 إلى معاملات قوى x الأعلى من 3 بالصفر نحصل على قيم المعاملات $b_4, b_5, b_6, \dots$ الباقية حيث نجد أنهم جميعاً يعتمدون على المعامل b_3 إذن فالمعامل b_3 يمكن اعتباره اختيارياً ويمكن عندئذ اختياره مساوياً للصفر، إذن الحل الثاني هو:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= Ay_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} \\ &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = b_0 x^{-1} + b_1 x^0 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots \\ &= b_0 x^{-1} - \frac{1}{2}b_0 - b_3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \dots \right) \end{aligned}$$

وبما أن $b_3 = 0$ إذن فإن

$$y_2(x) = \frac{b_0}{x} - \frac{b_0}{2} = b_0 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) ; b_0 \neq 0$$

المصادر

1. المطرفي، نجيب نقيع وعبد الله عبد الله موسى (٢٠١٢)، المعادلات التفاضلية، النظرية والتطبيق ط1، في إدارة النشر العلمي/ جامعة الطائف/ المملكة العربية السعودية (5-1).
2. أحمد، عبد الله البطحاني (2014): ملخصات في المعادلات التفاضلية الجزئية/ المملكة العربية السعودية - جامعة سيها/ كلية العلوم (17-15).
3. الحاج، نزهة محمد (2016): حلّ المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات جامعة سيها/ كلية العلوم/ قسم الرياضيات/ الملكة العربية السعودية (5-4).
4. عبد، فؤاد حمزة (٢٠١٥): محاضرات في الرياضيات/ جامعة بابل - كلية العلوم (7-1).
5. محمد، أسامة (٢٠١٨) ملخص المعادلات التفاضلية جامعة الانبار (25-5).
6. شكر الله، أميل صبحي (2018): المعادلات التفاضلية العادية/ جامعة الفرقان/ العلوم قسم الرياضيات/ المملكة العربية السعودية (8-3).
7. صابر، جمال عبد العزيز (2009): بحوث العليمات في المحاسبة، جامعة القاهرة/ كلية العلوم (20-5).
8. كومان، براويت (2009): عجائب الحساب العقلي ط1 دار الشروق للطباعة والنشر، عمان (3-2).